

٢٥

قسم الرياضيات
السنة الثانية



جامعة أسيوط
كلية العلوم

العام الدراسي : 2017 / 2018

تحليل (٣)

المحاضرة النظرية الثانية

(٢)

إعداد :

داني محفوض – وهب الحسن



Facebook: Dani Mahfoud



Facebook: Wahab Al-Hasan

أرضي: ٠٣١٢١١٨١١٩

جوال: ٩٤٤٨٠٨٢٤٩

تطلب من مكتبة مبارك الهندسية

حصص – نفق جامعة أسيوط

تسمي: في المحاضرة الأولى قمنا بدراسة عامة للمتواليات
والآن " في المحاضرة الثانية " سنبدأ بدراسة مفهوم السلسلة
العددية ، ومفهوم تقارب السلسلة وإبارة التقارب .

أولاً : مفهوم السلسلة العددية :

السلسلة العددية هي المجموع اللانهائي لحدود متتالية
عددية لانهائية ، فإذا كانت $\{a_n\}$ متتالية
عددية ، وكان لها الحدود :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$$

فإن المجموع اللانهائي لهذه الحدود

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$$

يشكل ما نسميه بالسلسلة العددية اللانهائية
وترمز لها بالرمز : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

* نسمي a_1 الحد الأول من حدود السلسلة ، ونسمي
 a_2 الحد الثاني و a_3 الحد الثالث و ... هكذا إلى أن
نصل إلى الحد a_n الذي نسميه الحد النوني ، وهو
الحد العام للسلسلة ، وهو الحد الذي يؤلف جميع
حدود السلسلة .

* ندرس أمثلة عن السلسلة :

مثال (1) : السلسلة : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$
نسمي هذه السلسلة بالسلسلة التوافقية وهذه
العام $a_n = \frac{1}{n}$ وتكتب بالشكل المختصر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

مثال (2) : السلسلة : $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$
 هذا العام $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$
 وتكتب بالشكل المتضمن : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

مثال (3) : السلسلة : $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} + \dots$
 حيث $a \neq 0$ عدد حقيقي . نسمي هذه السلسلة
 بالسلسلة الهندسية وهذا العام $u_n = a^{n-1}$

مثال (4) : السلسلة : $a + 2a + 3a + \dots + (n-1)a + \dots$
 نسمي هذه السلسلة بالسلسلة الحسابية و
 هذا العام $u_n = (n-1) \cdot a$

☀ إذا كان مجموع السلسلة $a_1 + a_2 + \dots + a_n$
 متناهياً فيمكن أن نجد قيمته الحقيقية وتسمى مجموع
 السلسلة ، أفا إذا كان المجموع لانهائياً فلنقول
 عنه شيئاً هو مجموع اللانهائي للسلسلة |

ثامياً : متتاليات الجاميع الجزئية للسلسلة :

لنكن لدينا المتتالية العددية : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$
 إذا بدأنا بالتالي بأخذ الجاميع الجزئية لحدودها :

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S_4 + a_5$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = S_{n-1} + a_n$$

و الآن: نُسَمِّي المتسلسلة التي هُذِرَتْهَا S_1 و S_2 و S_3 و S_4 و ... و S_n ، بِمَتَالِيَةِ الْجَامِيعِ التَّجْزِئِيَّةِ
لِلسُّلْسِلَةِ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، وَ تَقْرَأُ لَهَا بِ: $\{S_n\}$

ثَالِثًا: تَبَاعُدٌ وَ تَقَارُبٌ السُّلْسِلَةِ الْعَدَدِيَّةِ:

* إِذَا كَانَتْ مُتَالِيَةُ الْجَامِيعِ التَّجْزِئِيَّةِ $\{S_n\}$ لِلسُّلْسِلَةِ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، مُتَقَارِبَةً وَ نِهَائِيَّةً إِلَى أَيْ: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$

فِيهِ الْعَدَدُ s ، فَمَثَلُ مَجْمُوعِ السُّلْسِلَةِ وَ نَقُولُ فِي هَذِهِ:

الْحَالَةَ إِنَّ السُّلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقَارِبَةً.

* أَمَّا إِذَا كَانَتْ مُتَالِيَةُ الْجَامِيعِ التَّجْزِئِيَّةِ $\{S_n\}$ مُتَبَاعِدَةً

أَيْ لَيْسَ لَهَا نِهَائِيَّةٌ مُحدَّدةٌ، فَنَقُولُ أَنَّ السُّلْسِلَةَ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هِيَ سُلْسِلَةٌ مُتَبَاعِدَةٌ وَ لَيْسَ لَهَا مَجْمُوعٌ.

إِنَّ هَذِهِ الْحَدِيثَ عَنْ مَجْمُوعِ السُّلْسِلَةِ نَحْنُ نُسَمِّيهِ السُّلْسِلَةَ

الْمُتَقَارِبَةَ، أَمَّا السُّلْسِلَةُ الْمُبْتَاعِدَةُ فَلَا نَقُولُ لِلْحَدِيثِ

كَذَا مَجْمُوعُهَا.

ندرس أمثلة:

مثال (1): السلسلة $1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$
لنأخذ متتاليات المجاميع الجزئية لها فنحصل على:

$$S_1 = 1 \quad S_2 = 2 \quad S_3 = 3 \quad \dots \quad S_n = n$$

وتكون متتاليات المجاميع الجزئية لها:

$$1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$$

وهي متتاليات متباعدة لأنها تولد إلى اللانهاية
إذاً هذه السلسلة متباعدة.

مثال (2): السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

متتاليات المجاميع الجزئية:

$$S_1 = \frac{1}{2} \quad S_2 = \frac{2}{3} \quad S_3 = \frac{3}{4} \quad \dots \quad S_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

إذاً السلسلة متقاربة ومتبوعها واحد.

ملاحظة: إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

فإن:

وإذا كان $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ فإن السلسلة متباعدة.

ملاحظات (1): إذا كان $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

وكان $S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$

أرضي: ٠٣١٢١١٨١١٩

تطلب من مكتبة مير الهندسية

جوال: ٠٩٤٤٨٠٨٢٤٩

حمص - نقل جامعة البعث

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1})$$

\downarrow \downarrow
 s s_1

فِيَانْ:

مُدْعُوظَاتُ (2): إِذَا كَانَتْ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ وَ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سِلْسِلَتَيْنِ مُتَقَارِبَتَيْنِ فَيَانْ: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ سِلْسِلَةٌ مُتَقَارِبَةٌ أَيْضًا.

مُدْعُوظَاتُ (3): إِذَا كَانَتْ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ وَ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ إِمْدَاعِيَا سِلْسِلَتَيْنِ مُتَقَارِبَتَيْنِ وَ الْأُخْرَى مُبَاعِدَةً فَإِنَّا: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ سِلْسِلَةٌ مُبَاعِدَةٌ.

مُدْعُوظَاتُ (4): إِذَا كَانَتْ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ وَ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سِلْسِلَتَيْنِ مُبَاعِدَتَيْنِ فَيَانْ: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ هِيَ سِلْسِلَةٌ لَدِيْكَمُنَ الْحَاكِمِ عَلَيْهَا مُبَاسِرَةٌ.

مُدْعُوظَاتُ (5): إِذَا هَدَفْنَا فِي السَّلْسِلَةِ عَدَدٌ مُسَبَّحٌ مِنَ الْخُدُودِ فَيَانْ ذَلِكَ يُؤَثِّرُ عَلَى مَجْمُوعِ السَّلْسِلَةِ وَلَكِنْ لَا يُؤَثِّرُ عَلَى تَقَارُبِهَا.

السَّلْسِلَةُ الْحِسَابِيَّةُ: هِيَ مَجْمُوعُ خُدُودِ الْمَتَالِيَةِ الْحِسَابِيَّةِ:

$$a + (a+r) + (a+2r) + \dots + (a+(n-1)r) + \dots$$

و هِيَ سِلْسِلَةٌ مُبَاعِدَةٌ دَائِمًا.

السلسلة الهندسية: هي كل سلسلة من الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$$

هنا الأول هو a و أساسها هو r .

* الحد العام للسلسلة الهندسية: $S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$

* إذا كان $|r| < 1$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

ومن هذه الحالة تكون السلسلة الهندسية متقاربة

و مجموعها $\frac{a}{1-r}$.

* أما إذا كان $|r| \geq 1$ فالسلسلة الهندسية متباعدة لأن حداتها العام لا يثبت إلى الصفر.

ملاحظة: إذا كان الحد العام للسلسلة الهندسية

يثبت للصفر فنحن أن تكون متقاربة وممكن أن

تكون متباعدة، أما إذا يثبت إلى غير الصفر فهي متباعدة.

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ هذه سلسلة متباعدة لأن:

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\Rightarrow a_n = \left[\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} \right]^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow \text{متباعدة}$$

أرضي: ٠٢١٢١١٨١١٩

تطلب من مكتبة معيار الهندسية

جوال: ٠٩٤٤٨٠٨٢٤٩

حمص - نعلل جامعة البعث

تعريف: ادرس تقارب السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ أو هذا مجموعها.
الحل: نلجأ إلى تعريف الكسور:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

بتوحيد المقامات وهدف المقام المشترك يكون:

$$1 = n(A+B) + A$$

وبمقارنته الأمثلة بين الطرفين سيكون:

$$\boxed{B = -1} \quad \Leftarrow \quad A+B=0 \quad \text{و} \quad \boxed{A=1}$$

إذاً:

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} *$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$* S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$* S_2 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$* S_3 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_n = (1 - \frac{1}{2}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

إذاً السلسلة متقاربة ومجموعها 1.

انتهت المذاكرة الثانية